Beispiel zur Ermittlung eines Amplitudenspektrums

René Schwarz* (rene-schwarz.com)

25. September 2009

Ein Amplitudenspektrum ist die Darstellung der Amplituden und deren Verteilung über der Frequenz der spektralen Anteile eines Signals. Üblicherweise wird das Amplitudenspektrum durch die Fouriertransformation des Signals gewonnen. Diese Ausarbeitung zeigt beispielhaft die Errechnung des Amplitudenspektrums anhand eines einfachen Signals, bestehend aus drei Fundamentalschwingungen mit sinusförmigen Charakter.

Mit der Fourier-Transformation eines Signals $X(t)$ in den Bildbereich kann man ein Signal in seine Frequenzbestandteile zerlegen. Dadurch erhält man das Spektrum $S_X(\mathrm{j}\omega)$ des Signals, welches in aller Regel komplexwertig ist. Den Betrag dieses Spektrums nennt man Amplitudenspektrum $A_X(\omega)$.

$$S_X(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{X(t)\} \qquad A_X(\omega) = |S_X(\mathrm{j}\omega)| \tag{1}$$

Gemäß der Definition der Fourier-Transformation lässt sich das Amplitudenspektrum $A_X(\omega)$ eines Signals $X(t)$ dabei nach folgender Gleichung für den Zeitraum $[0, T]$ ermitteln:

$$A_X(\omega, T) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int\limits_0^T X(t) \cdot e^{-\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}t \right| \tag{2}$$

Im Normalfall wird sich ein Signal $X(t)$ durch die Überlagerung mehrerer Schwingungen mittels der Entwicklung einer Fourier-Reihe beschreiben lassen. Die Parameter der Fourier-Reihe werden bei der Entwicklung der Reihe bestimmt. Beispielhaft wird für diese Ausarbeitung ein Signal $X(t)$ aus der Überlagerung dreier sinusförmiger Fundamentalschwingungen beschrieben[1]:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{3} A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i), \tag{3}$$

wobei die drei Parameter A_i (Amplitude der i-ten Fundamentalschwingung), ω_i (Frequenz der i-ten Fundamentalschwingung) und α_i (Phasenverschiebung der i-ten Fundamentalschwingung) wie folgt definiert werden:

*Student an der Hochschule Merseburg (FH). Kontakt: mail@rene-schwarz.com, Internet: http://www.rene-schwarz.com

[1] Die Entwicklung einer Fourier-Reihe zur Beschreibung eines gemessenen Signals soll nicht Bestandteil dieser Ausarbeitung sein.

i	Frequenz f [Hz]	Amplitude A [-]	Phasenverschiebung α
1	10	1	0
2	25	1,5	π
3	40	4	2π

Die Frequenz f in der Einheit $1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ ist bei Verwendung in die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ [rad/s] umzuwandeln. Mit diesen Parametern ergibt sich der in Abbildung 1 gezeigte Signalverlauf für $X(t)$.

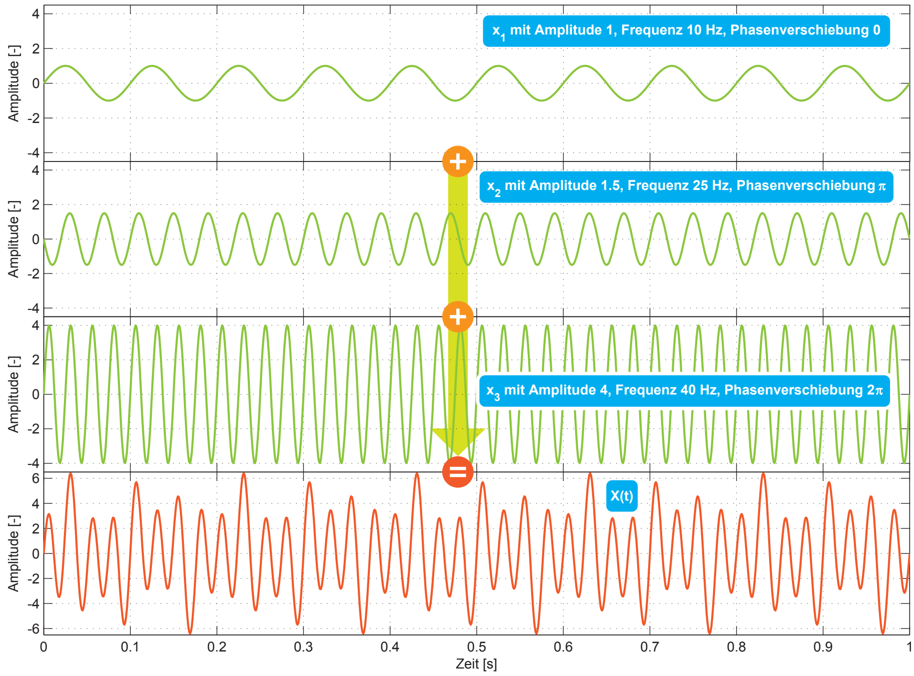

Abbildung 1: Plot der drei Fundamentalschwingungen sowie deren Überlagerung zum Signal $X(t)$

In Gleichungsform ergibt sich $X(t)$ somit zu

$$X(t) = \sin(2\pi \cdot 10\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t) + 1{,}5 \cdot \sin(2\pi \cdot 25\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \pi) + 4 \cdot \sin(2\pi \cdot 40\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + 2\pi). \tag{4}$$

Wird nun Gleichung 3 – zur Vereinfachung vorerst ohne die Zahlenwerte der Parameter – in Gleichung 2 eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_X(\omega, T) &= \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T \sum_{i=1}^{3} A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{i=1}^{3} \int_0^T A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{i=1}^{3} \left[-\frac{A_i \cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}(\omega_i \cdot \cos(\alpha_i + \omega_i t) + \mathrm{j}\omega \cdot \sin(\alpha_i + \omega_i t))}{\omega_i^2 - \omega^2} \right]_{t=0}^{T} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i(\omega_i \cdot \cos(\alpha_i) + \mathrm{j}\omega \sin(\alpha_i) - e^{-\mathrm{j}\omega T}(\omega_i \cdot \cos(\alpha_i + \omega_i T) + \mathrm{j}\omega \cdot \sin(\alpha_i + \omega_i T))}{\omega_i^2 - \omega^2} \right|
\end{aligned} \tag{5}$$

Doch wie ermittelt man nun den Betrag der komplexen Funktion?!?!